

الخاتمة تقريباً في كل مكان

تعريف

تكن P خاتمة رابعية معرفة على مجموعة E عتية
 نقول ان الخاتمة P معرفة تقريباً في كل مكان على مجموعة E
 اذا حقق ما يلي:

- (1) توجد مجموعة جزئية $E_0 \subset E$ ميسرة ومقاسة $M(E_0) < \infty$
 (2) الخاتمة P صحيحة على المجموعة E/E_0 غير صحيحة على E_0
 وتكتب $P(M-a.e)$ او $P^{a.e}$

ملامحة

- (P) الخاتمة P المذكورة بالتعريف فتكون استمرارية قابلية
 الاستقانة المحدودة - تقارب متتالية ...
 (3) فتكون $E_0 = \emptyset$ وفي هذه الحالة نقول ان الخاتمة P
 صحيحة في كل مكان على E (من: $a.e$ تقريباً في كل مكان)

أمثلة

مثال

تكن الدالة

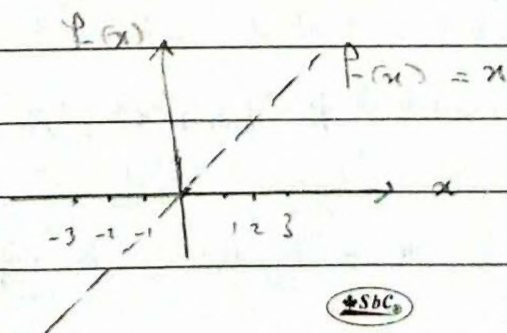
$$P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ المعرفة بالشكل}$$

$$P(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{N} \\ x & ; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

هذه الدالة مستمرة تقريباً في كل مكان على \mathbb{R} .

الحل

نلاحظ ان الدالة P غير مستمرة في كل نقطة $x \in \mathbb{N}$

وهنا $E_0 = \mathbb{N}$ ومقاسها $\lambda(\mathbb{N}) = 0$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} +x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

هنا $E_0 = \mathbb{N}$ وقياسه $\lambda(\mathbb{N}) = 0$

لذلك تكون الدالة f مستمرة تقريباً في كل مكان على \mathbb{R}

لذلك ليست مستمرة في كل مكان على \mathbb{R}

مثال 2

ليكن الدالة $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالشكل

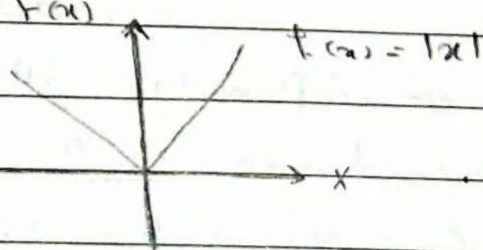
$$f(x) = |x|$$

هل f مستمرة أو قابلة للاستقافة؟

الحل:

الدالة $f(x) = |x|$ مستمرة على \mathbb{R} في كل مستمرة

في كل مكان



هل f قابلة للاستقافة؟

وهي قابلة للاستقافة عند الصفر.

هنا $E_0 = \{0\}$ وبالتالي:

$$\lambda(E_0) = (\{0\}) = 0$$

أي أن الدالة قابلة للاستقافة تقريباً في كل مكان على \mathbb{R}

$$f'(x) = \begin{cases} +1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

ومستقرة

مثال 3

ليكن الدالة $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالشكل

$$f(x) = \tan x$$

هل f مستمرة تقريباً في كل مكان؟

الحل:

$$\tan x = \pm \infty \text{ و } x = \frac{\pi}{2} k \text{ و } k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$|\tan x| = \infty \text{ و } x = \frac{\pi}{2} k \text{ و } k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & , 0 < x < 1 \\ 1 & ; x = 1 \end{cases}$$

فذلك هو المثال $f_n(x) = x^n$ متوالية تقريبية
 في كل مكان على $[0, 1]$ $f(x) = 0$ $\forall x \in [0, 1]$ $\neq 1$ $\forall x = 1$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{\text{a.e}}{=} 0$$

$$E_0 = \{x \in [0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq 0\} = \{1\}$$

$$\Rightarrow \lambda(E_0) = \lambda(\{1\}) = 0$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad , \quad x \in [0, 1] \setminus \{1\}$$

مثال 6: $\{f_n(x)\}$ المتوالية \hat{R} على \mathbb{R}

$$f_n(x) = \begin{cases} 1+x^2 & , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ \frac{1}{1+x^{2n}} & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1+x^2 & , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1+x^2 & , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$E_0 = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq 1+x^2\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0\} = \mathbb{Z}$$

$$\lambda(E_0) = \lambda(\mathbb{Z}) = 0$$

جانباً

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{a.e}{=} 1+x^2$$

وهذا يثبت أن دالة مقاربة تلك مقاربة تقريباً $n \rightarrow \infty$ في كل مكان

مثال 7

$$f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

تكن الدالتين

المعرفتين بالآلة:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq x < 1 \\ 2 & ; x = 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq x < 1 \\ 12 & ; x = 1 \end{cases}$$

$$\text{هل } f \stackrel{a.e}{=} g$$

الحل

$$E_0 = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \neq g(x)\} = \{1\}$$

$$\Rightarrow \lambda(E_0) = \lambda(\{1\}) = 0$$

$$f \stackrel{a.e}{=} g$$

مثال 8 - آخر

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

تكن

$$f(x) = e^x$$

$$g(x) = \begin{cases} e^x & ; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \\ 1 & ; x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

الحل

$$\text{هل } f \stackrel{a.e}{=} g$$

$$\text{هل } f, g \text{ متماثلتان على } \mathbb{R}$$

الحالة تقريباً في كل مكان وليس لها...

1 / 1

الحل:

$$E_0 = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\} = N$$

11

$$\lambda(E_0) = \lambda(N) = 0$$

وكذلك

$$g(x) = f(x) + e^x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus N$$

أيضاً

$$f \stackrel{a.e}{=} g$$

12

الدالة f و g متفرقة على \mathbb{R} (في كل مكان) \neq
 والدالة $g(x)$ متفرقة تقريباً في كل مكان (أي غير متفرقة على n
 دالة $\lambda(N) = 0$)

انتهت الحالة 11